On rigidity of Coxeter groups (Cohomology Theory of Finite Groups and Related Topics)

保坂, 哲也

数理解析研究所講究録 1357 巻 2004 年 69-75

On rigidity of Coxeter groups

宇都宮大学教育学部 (Utsunomiya University)

保坂 哲也 (Tetsuya Hosaka)

1. 序

本稿では, Coxeter 群の rigidity に関して得られた結果を紹介する.
まず, Coxeter 群と Coxeter 系の定義を与える.

Definition 1.1. 有限集合 S と写像 $m: S \times S \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ で次の条件をみたすものを考える.

(1) すべての $s,t \in S$ について $m(s,t) = m(t,s)$,
(2) すべての $s \in S$ について $m(s,s) = 1$,
(3) 相異なるすべての $s,t \in S$ について $m(s,t) \geq 2$.

このような S と m によって

$$W = \langle\, S \mid (st)^{m(s,t)} = 1 \text{ for } s,t \in S \,\rangle$$

と表現される群 W を **Coxeter 群**とよび, (W,S) の組を **Coxeter 系**と呼ぶ. また, 更に条件

(4) 相異なるすべての $s,t \in S$ について $m(s,t) = 2$ or ∞

をみたすとき, (W,S) を **right-angled Coxeter 系**とよぶ.

Coxeter 系に対して parabolic 部分群とよばれる部分群が定義される.

Definition 1.2. Coxeter 系 (W,S) と S の部分集合 T に対して, W_T を T によって生成される W の部分群とする. このような W_T を **parabolic 部分群**とよぶ.

Remark. Coxeter 系 (W,S) と S の部分集合 T に対して, 上述の定義どおり Coxeter 群 W が

$$W = \langle\, S \mid (st)^{m(s,t)} = 1 \text{ for } s,t \in S \,\rangle$$

と表現されているとき，parabolic 部分群 W_T は

$$W_T = \langle\, T \mid (st)^{m|_{T\times T}(s,t)} = 1 \text{ for } s,t \in T\,\rangle$$

と表現できることが知られている (cf. [B]). 従って，(W_T, T) は再び Coxeter 系となる.

Coxeter 系を視覚的に捕らえるため，Coxeter diagram を定義する.

Definition 1.3. 有限の頂点をもち，ループをもたず，二つの頂点を結ぶ edge は高々一つである重みつきグラフ Γ で，各 edge に対応する数字は 2 以上の整数であるとき，Γ を **Coxeter diagram** とよぶ.

Coxeter 系 (W,S) に対して，Coxeter diagram $\Gamma(W,S)$ を次の方法で一意的に定めることができる:

(1) $\Gamma(W,S)$ の vertex set を S とする.
(2) $s,t \in S$ に対して，$m(s,t) < \infty$ のときに限り s と t は edge で結ばれているとする.
(3) $s,t \in S$ に対して，s と t が edge で結ばれているとき，この edge に対して整数 $m(s,t)$ を対応させる.

逆の方法により，Coxeter diagram に対して Coxeter 系が定義される. このように Coxeter 系と Coxeter diagram は対応がつく.

直接扱うことが難しい無限 Coxeter 群に対して，近年，幾何的なものを対応させて性質を調べることが活発に行われている. Coxeter 系から simplicial complex $L(W,S)$ と CAT(0) 空間 $\Sigma(W,S)$ を定義する.

Definition 1.4. Coxeter 系 (W,S) に対して，simplicial complex $L(W,S)$ を次で定義する:

(1) $L(W,S)$ の vertex set を S とする.
(2) S の空でない部分集合 T は，W_T が有限のときに限り $L(W,S)$ の simplex を張るとする.

Definition 1.5. (W,S) を Coxeter 系とする. このとき，離散位相を入れた W と $L(W,S)$ の cone $CL(W,S)$ の基底空間 $|CL(W,S)|$ の積 $W \times |CL(W,S)|$ 上の同値関係 $\sim$ を次で定める: $(w_1,x_1),(w_2,x_2) \in W \times |CL(W,S)|$ について

$$(w_1,x_1) \sim (w_2,x_2) \iff x_1 = x_2 \text{ and } w_1^{-1}w_2 \in W_{V(x_1)},$$

ただし $V(x) = \{s \in S \mid x \in \mathrm{St}(s, \mathrm{sd}\, L(W,S))\}$. ここで，$\mathrm{St}(s,\mathrm{sd}\,L(W,S))$ は $L(W,S)$ の重心細分 $\mathrm{sd}\,L(W,S)$ における s の closed star をあらわす. このとき，

$$\Sigma(W,S) := (W \times |CL(W,S)|)/\sim$$

と定義し，これを **Davis-Vinberg complex** とよぶ．$\Sigma(W,S)$ は contractible となり ([D1]), 1-skeleton が W の S に関する Cayley graph となるような CW-complex とみなすことができる ([D2]) ことが知られている．このとき，自然な距離に関して $\Sigma(W,S)$ は CAT(0) 空間となることが G.Moussong によって示されている ([M]).

一般に CAT(0) 空間は境界と呼ばれる空間を付け加えることによりコンパクト化される．

Definition 1.6. CAT(0) 空間 X に対して，X **の境界** ∂X を

$$\partial X = \{\xi : [0,\infty) \to X \text{ geodesic ray} \mid \xi(0) = x_0\}$$

と定義する．ただし $x_0 \in X$ である．実際には ∂X は x_0 の取り方によらないことが知られている ([BH]).

Coxeter 系の「境界」の定義は以下の通りである．

Definition 1.7. Coxeter 系 (W,S) から定義される CAT(0) 空間 $\Sigma(W,S)$ の境界 $\partial\Sigma(W,S)$ を **Coxeter 系** (W,S) **の境界** とよぶ．

Coxeter 群 W の代数的な性質とこの境界 $\partial\Sigma(W,S)$ の幾何的な性質を調べることが本研究における目的である．

2. Rigidity

一般に Coxeter 群によって Coxeter 系は決定されないことが知られている．

Example 1 ([B, p.38 Exercise 8]). 以下の Figure 1 の diagram で定義される二つの Coxeter 群は同型となることが知られている．

Figure 1. Two distinct Coxeter diagrams for D_6

Example 2 ([Mu]). 以下の Figure 2 の diagram で定義される二つの Coxeter 群は同型となることが，B.Mühlherr([Mu]) によって示されている．

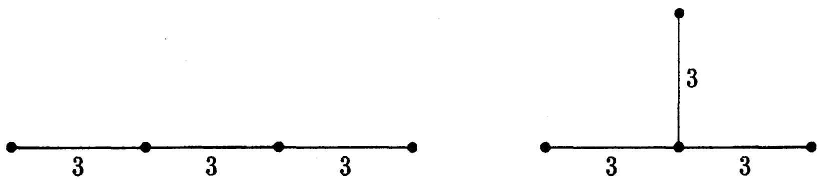

FIGURE 2. Coxeter diagrams for isomorphic Coxeter groups

有限な Coxeter 群については [B] にみられるように，完全に分類が与えられるなど，ある程度のことがわかっているのだが，無限の場合についてはまだほとんど分かっていない状況にある．Coxeter 群の代数的な rigidity の問題として次の問題がある．

Problem (Charny and Davis [CD]**).** 無限 Coxeter 群を Coxeter 系を用いて分類せよ．特に，どのような条件下で Coxeter 群は Coxeter 系を決定するのか?

Coxeter 系の境界に関しては，A.N.Dranishnikov による次の予想がある．

Rigidity Conjecture (Dranishnikov [Dr]**).** Coxeter 系 (W, S), (W', S') に対して，Coxeter 群 W と W' が同型ならば，境界 $\partial\Sigma(W, S)$ と $\partial\Sigma(W', S')$ は同相となるであろう．

この二つの rigidity の問題について，特に Coxeter 系が right-angled な場合に関しては，D.Radclife と独立に，Tits の代数的な結果 (cf. [Br2, p.50]) を用いて次の定理を得ている．

Theorem 2.1 ([H1]). *Coxeter 系 (W, S), (W', S') について，Coxeter 群 W と W' が同型で (W, S) が right-angled ならば，(W, S) と (W', S') は Coxeter 系として同型となる．特に，境界 $\partial\Sigma(W, S)$ と $\partial\Sigma(W', S')$ は同相となる．*

この定理により，right-angled な Coxeter 群は，Coxeter 系によって完全に分類されることがわかる．また，これは Dranishnikov の rigidity conjecture が，right-angled の場合には正しいことを示している．

3. 2 次元の Davis-Vinberg complex をもつ Coxeter 系

Coxeter 群の代数的な rigidity に関連して，次の定理が示されている．この定理は A.Kaul の結果 ([K]) の拡張として与えられた．

Theorem 3.1 (Brady, McCammond, Mühlherr and Neumann [BMMN]). *Coxeter* 系 (W,S), (W',S') について，*Coxeter* 群 W と W' が同型で，相異なるすべての $s,t \in S$ について *order* $o(st)$ が奇数か無限のとき，次が成り立つ:

(1) $|S| = |S'|$,

(2) 元の個数も含めて $\{o(st) : s,t \in S\} = \{o(s't') : s',t' \in S'\}$.

この定理の一般化として，$\dim \Sigma(W,S) = 2$ の場合について，次の定理を得た.

Theorem 3.2 ([H2]). *Coxeter* 系 (W,S), (W',S') について，*Coxeter* 群 W と W' が同型で $\dim \Sigma(W,S) = \dim \Sigma(W',S') = 2$ のとき，次が成り立つ:

(1) $|S| = |S'|$,

(2) 元の個数も含めて $\{o(st) : s,t \in S\} = \{o(s't') : s',t' \in S'\}$.

Remark. 定義から

$$\dim \Sigma(W,S) = \max\{|T| : W_T \text{ が有限となる } T \subset S\}$$

であるから，例えば，次のいずれかを満たす場合は $\dim \Sigma(W,S) = 2$ となる.

(1) 相異なるすべての $s,t \in S$ について $o(st)$ が奇数か無限のとき.

(2) 相異なるすべての $s,t \in S$ について $o(st) \geq 3$ のとき.

(3) (W,S) の Coxeter diagram が tree のとき.

従って，この (1) のケースから，Theorem 3.2 は Theorem 3.1 の拡張となっていることがわかる.

Coxeter 系 (W,S) に対して，wsw^{-1} ($w \in W$, $s \in S$) という形の W の元を **reflection** とよび，reflection 全体の集合を R_S とあらわすことにする.

Example 1 で与えられた例では，二つの Coxeter 系の reflection の集合 R_S は異なるが，Example 2 の場合には一致する．また，Example 2 の二つの Coxeter 系は，diagram twisting という操作で移りあえる.

ここで次の予想がある.

Conjecture (Brady, McCammond, Mühlherr and Neumann [BMMN]). Coxeter 系 (W,S), (W,S') に対して，$R_S = R_{S'}$ ならば，(W,S) と (W,S') は diagram twisting で移りあえるであろう.

この予想が部分的には正しいことを示す次の定理が，最近，証明されている.

Theorem 3.3 (Mühlherr and Weidmann [MW]). (W,S), (W,S') を *Coxeter* 系とする．相異なるすべての $s,t \in S$ について $o(st) \geq 3$ のとき，$R_S = R_{S'}$ ならば，(W,S) と (W,S') は *diagram twisting* で移りあえる.

今後の課題として，Theorem 3.2 との関連から，Theorem 3.3 の拡張として次の問題が提起される.

Problem. (W,S), (W,S') を Coxeter 系とする．$\dim\Sigma(W,S)=2$ のとき，$R_S=R_{S'}$ ならば，(W,S) と (W,S') は diagram twisting で移りあえるか?

4. Strong rigidity と strong reflection rigidity

Coxeter 群の分類問題に対して，strong rigidity と strong reflection rigidity という概念が導入される.

Definition 4.1. W を Coxeter 群とする．W の任意の Coxeter 系 (W,S), (W,S') に対して，ある $w\in W$ を用いて $S=wS'w^{-1}$ と書けるとき，W を **strongly rigid** であるという.

一般に，(W,S) が Coxeter 系ならば，(W,wSw^{-1}) も Coxeter 系となることが知られている.

Strong rigidity に関しては，次の定理が示されている.

Theorem 4.2 (Charney and Davis [CD]). *Coxeter系 (W,S) に対して，$\Sigma(W,S)$ が manifold ならば，Coxeter 群 W は strongly rigid である.*

また strongly reflection rigid という概念が定義される.

Definition 4.3. (W,S) を Coxeter 系とする．$R_S=R_{S'}$ となる任意の Coxeter 系 (W,S') に対して，ある $w\in W$ を用いて $S=wS'w^{-1}$ と書けるとき，(W,S) を **strongly reflection rigid** であるという.

この strong rigidity と strong reflection rigidity という概念について，dihedral Coxeter 群に関しては，完全な分類に成功している.

Theorem 4.4 ([H3]). *$S=\{s,t\}$ とおき，dihedral Coxeter 群*

$$D_m=\langle\, S \mid s^2=t^2=(st)^m=(ts)^m=1\,\rangle$$

(ただし $m\geq 2$) を考える．このとき次が成り立つ.

(1) *Coxeter 系 (D_m,S) が strongly reflection rigid となる必要十分条件は $m\in\{2,3,4,6\}$ である.*
(2) *Dihedral Coxeter 群 D_m が strongly rigid となる必要十分条件は $m\in\{3,4\}$ である.*

より一般の場合に関する strong rigidity と strong reflection rigidity の分類が今後の課題となっている.

REFERENCES

[B] N.Bourbaki, *Groupes et Algebrès de Lie*, Chapters IV-VI, Masson, Paris, 1981.

[BMMN] N.Brady, J.P.McCammond, B.Mühlherr and W.D.Neumann, *Rigidity of Coxeter groups and Artin groups*, Geom. Dedicata **94** (2002), 91–109.

[BH] M.R.Bridson and A.Haefliger, *Metric spaces of non-positive curvature*, Grundl. Math. Wiss., Vol. 319, Springer, Berlin, 1999.

[Br1] K.S.Brown, *Cohomology of groups*, Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1982.

[Br2] K.S.Brown, *Buildings*, Springer-Verlag, 1980,

[CD] R.Charney and M.W.Davis, *When is a Coxeter system determined by its Coxeter group?* J. London Math. Soc. **61 (no.2)** (2000), 441–461.

[D1] M.W.Davis, *Groups generated by reflections and aspherical manifolds not covered by Euclidean space*, Ann. of Math. **117** (1983), 293–324.

[D2] M.W.Davis, *Nonpositive curvature and reflection groups*, in Handbook of geometric topology (Edited by R.J.Daverman and R.B.Sher), North-Holland, Amsterdam, 2002, pp.373–422.

[Dr] A.N.Dranishnikov, *On boundaries of hyperbolic Coxeter groups*, Topology Appl. **110 (no.1)** (2001), 29–38.

[Dy] M.Dyer, *Reflection subgroups of Coxeter systems*, J. Algebra **135 (no.1)** (1990), 57–73.

[H1] T.Hosaka, *Determination up to isomorphism of right-angled Coxeter systems*, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. **79** (2003), 33–35.

[H2] T.Hosaka, *Coxeter systems with two-dimensional Davis-Vinberg complexes*, preprint, 2002.

[H3] T.Hosaka, *Strong reflection rigidity of Coxeter systems of dihedral groups*, preprint, 2003.

[Hu] J.E.Humphreys, *Reflection groups and Coxeter groups*, Cambridge University Press, 1990.

[K] A.Kaul, *Rigidity for a class of Coxeter groups*, J. London Math. Soc. (2) **66 (no.3)** (2002), 592–604.

[M] G.Moussong, *Hyperbolic Coxeter groups*, Ph.D. thesis, The Ohio State University, 1988.

[Mu] B.Mühlherr, *On isomorphisms between Coxeter groups*, to appear in Designs, Codes and Cryptography.

[MW] B.Mühlherr and R.Weidmann, *Rigidity of skew-angled Coxeter groups*, Adv. Geom. **2** (2002), 391–415.